数理解析研究所講究録
602巻 1986年 151-166

Duffing方程式の対称解と非対称解

岩手大教育　中嶋文雄（Fumio Nakajima）

§1. まえがき

非線型な電気回路における現象等を記述する方程式として、次のDuffingの方程式が知られている。

$$(1)\quad \begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -kv - au - bu^3 + B\cos t \end{cases} \qquad \left(\cdot = \frac{d}{dt}\right)$$

ここで、$k>0$, $a\geqq 0$, $b>0$, $B\geqq 0$ は定数である。

これらparameterの選び方により、(1)は一般に複数ヶの2π-周期解 $u(t)$ をもつことが知られている。これら2π-周期解の中で、$u(t+\pi)\equiv -u(t)$ となるものを odd harmonic 解と呼び、これが成立しないものを non odd harmonic 解と呼ぶ。即ち、

$$2\pi\text{-周期解}\begin{cases} \text{odd harmonic 解} \\ \text{non odd harmonic 解} \end{cases}$$

と表わされる。

odd harmonic解は、そのフーリエ級数が奇数次のもののみから成立する。

さて、odd harmonic 解の存在については、$k=0$ の時無限ケの odd harmonic 解が存在することが既に知られており、また、$k>0$ が十分大ならば、(1)に存在する唯一つの 2π－周期解は odd harmonic 解であることは、容易に確かめられる。それでは、一般の $k>0$ に対し、(1)は odd harmonic 解をもつか？　この問は、著者の知る限り、これまで研究されていないようである。本稿の定理1において、$k>0$ では、(1)は常に odd harmonic 解をもつことを示す。そこでは、〔3〕の不動点定理が用いられている。

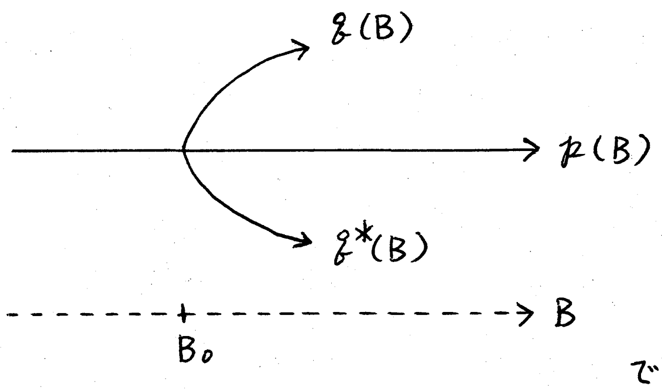
次に、$u(t)$ を odd harmonic 解とすれば、その軌跡 $\{(u(t), v(t))\,;\, 0 \leqq t \leqq 2\pi\}$ は、原点に関し対称となることは、容易に確かめられる。それでは、逆に、原点に関し対称な軌跡をもった 2π－周期解は、odd harmonic 解になり得るか？　この問が、肯定的に解かれることを定理2では述べる。そこでは、系1の右辺が (t, u, v) の解析関数であることが用いられている。

定理2の結果.

$$\begin{cases} \text{odd harmonic 解} \longleftrightarrow \text{対称解} \\ \text{non odd harmonic 解} \longleftrightarrow \text{非対称解} \end{cases}$$

と考えることができる。

次に、non odd harmonic 解の存在について考える。(1)において、Bが十分小ならば、odd harmonic解が唯一つ存在し、non odd harmonic解は存在しない。
それでは、non odd harmonic 解は、いかなる仕組みによって生成し、消滅するか？ これについて、[1]の興味ある物理的結果がある。それによれば、(1)の parameter B がある値 B_0 を横切って増加すれば、odd harmonic解から2ヶの non odd harmonic解が分岐して発生する。
これを図示すれば、



である。

ここで、$p(B)$は odd harmonic解の初期値を表わし、$g(B)$と$g^*(B)$ は2ヶの non odd harmonic 解の初期値である。
この時、$p(B)$は $B<B_0$ で completely stable で、$B>B_0$ で directly unstable であること、即ち、$p(B)$はB_0でその安定性を変えることが知られている。

(1)において、$k=0$ の場合、ある仮定の下で、W.S.

Loud は、上述の分岐現象が起ることを数学的に証明した。

本稿では、(1)において $k>0$ の場合を考える。

先づ、定理3では、ある条件下で、directly unstable odd harmonic 解の存在は、上述の安定性の変化を意味することを示す。定理4では、ある条件下で、odd harmonic 解の安定性の変化は、上述の non odd harmonic 解の分岐現象の存在を意味することを示す。

定理1～4の結果は(1)のみならず、これを含むある2次元周期系に対しても成立するものである。

(1)の解で、$t=0$ で $p\in R^2$ を通るものを $(u(t,p),v(t,p))$ と書く。

[定義1]

(イ) $(u(t,p),v(t,p))$ が odd harmonic 解であれば、p を odd harmonic 点という。

(ロ) $(u(t,p),v(t,p))$ が non odd harmonic 解であれば、p を non odd harmonic 点という。

§2. odd harmonic 解の存在について

<u>定理1.</u>

(1)において、$k>0$ とする。この時、少くとも1ケの odd harmonic 解が存在する。

証明. p が odd harmonic 点であることは、

$$(-u(t+\pi, p), -v(t+\pi, p)) = (u(t,p), v(t,p))$$

となることである。解の初期値に対する唯一性より、これは、

$$(-u(\pi, p), -v(\pi, p)) = p$$ と同値である。

そこで、写像 $S(p) : p \in R^2 \longrightarrow R^2$ を

$$S(p) = (-u(\pi, p), -v(\pi, p))$$ で定義する。

S は R^2 から R^2 への $1:1$、連続な写像である。

(1) は $k>0$ の時、dissipative であることが知られている。

即ち、ある定数 $H_0 > 0$ が存在して、

$$D_{H_0} = \{ p \in R^2 ; |p| \leqq H_0 \}$$

（ここで、$|\ |$ は R^2 のあるノルムとする）と置くと、任意の解 $p \in R^2$ に対し、

$$(u(t,p), v(t,p)) \in D_{H_0} \qquad (t: 十分大)$$

である。よって、

$$S^n(p) \in D_{H_0} \qquad (n: 十分大)$$

である。　[3] の不動点定理を用いると、S は D_{H_0} の中に不動点 p をもつ。即ち

$$S(p) = p$$

である。この p は odd harmonic 点である。

(1)の 2π−周期解 $(u(t), v(t))$ に対し、その軌跡L;

$$L = \{(u(t), v(t)) \in R^2 \,;\, 0 \leqq t \leqq 2\pi\}$$

は、閉曲線となる。次にこの曲線の形状について考察する。

定理2.

(i) (1)の odd harmonic解 $(u(t), v(t))$ の軌跡Lは、原点に関し対称となる。

(ii) 2π−周期解で、その軌跡が原点に関し対称ならば、この解は odd harmonic である。

証明　(i)を示す。(ii)は省略する。

$$L = \{(u(t), v(t)) \,;\, 0 \leqq t \leqq \pi\} \cup \{(u(t), v(t)) \,;\, \pi \leqq t \leqq 2\pi\}$$

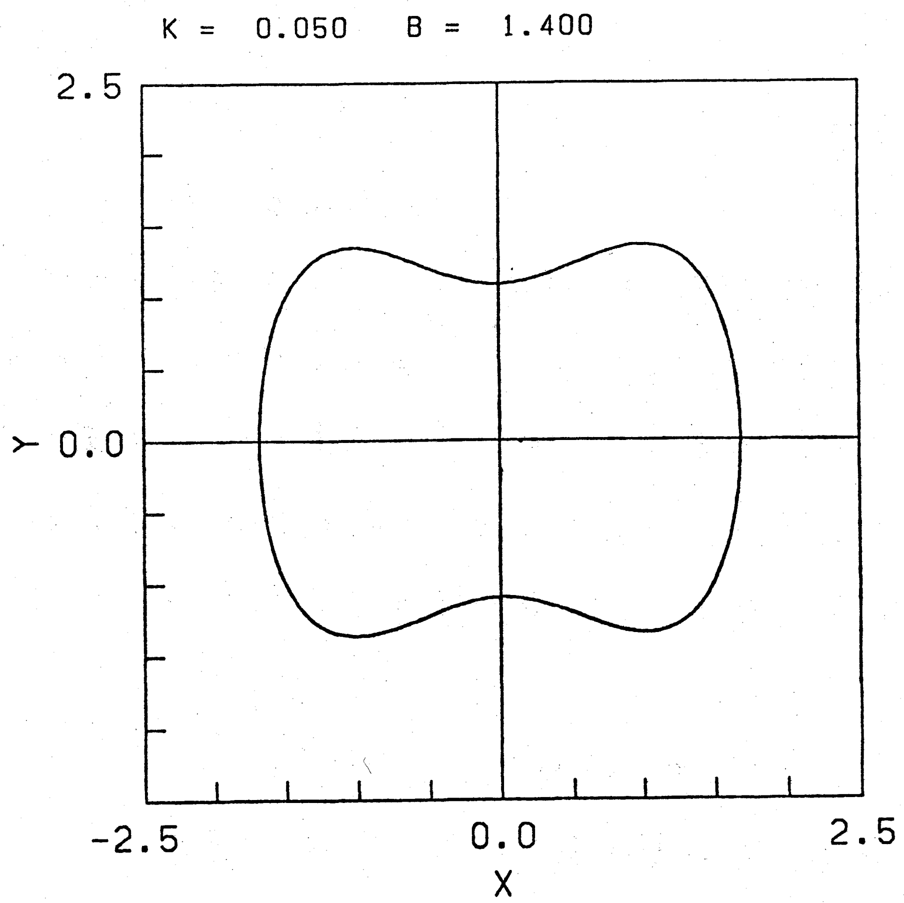
と書ける。

$u(t+\pi) = -u(t)$,　$v(t+\pi) = -v(t)$　より

$$L = \{(u(t), v(t)) \,;\, 0 \leqq t \leqq \pi\} \cup \{-(u(t), v(t)) \,;\, 0 \leqq t \leqq \pi\}$$

ゆえに、Lは原点に関し対称となる。

図1は、[7]より引用した対称な解軌道の例、及び非対称な例である。そこでは、(1)において、$a=0$, $b=1$ の場合が扱われている。



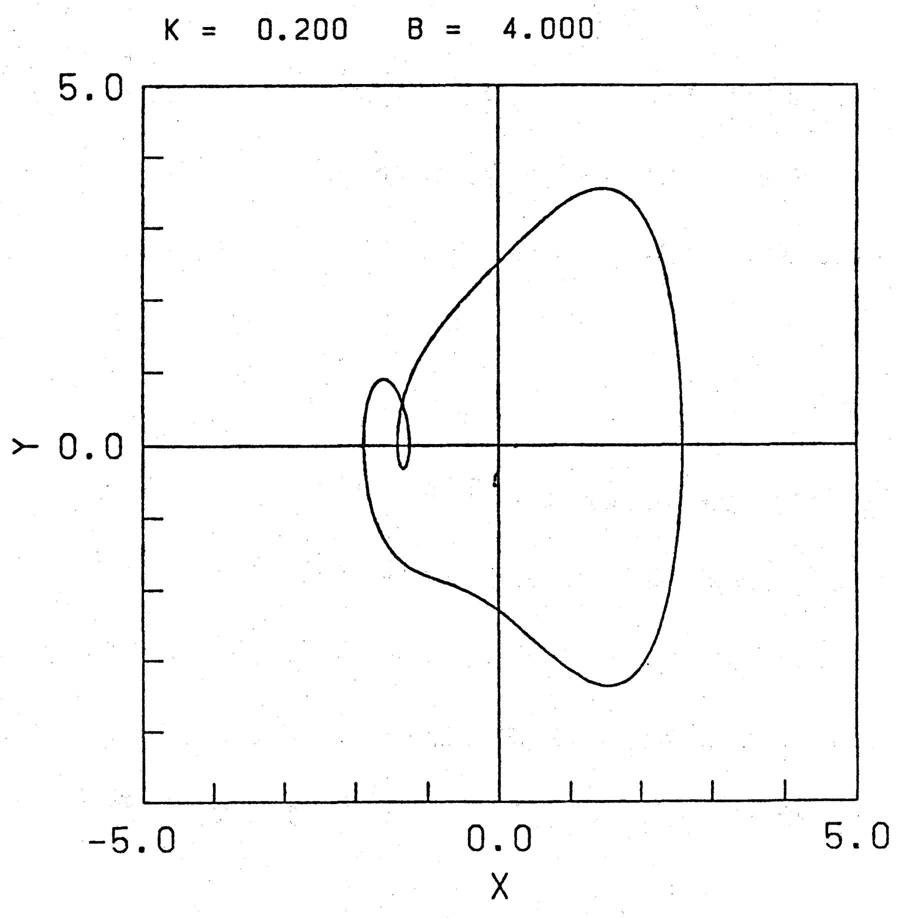


図 1、

7

§3. 安定性の変化

定理1によって、(1)においていかなるBに対しても、odd harmonic解 $p(B)$ が存在する。Bが連続的に変化する時、$p(B)$が連続的に変化しても、$p(B)$が安定から不安定に変化することがある。ここでは、この事について述べる。

pを(1)のodd harmonic点とし、$(u(t,p), v(t,p))$をodd harmonic解とすると、対応する変分方程式は、

$$(2)\quad \dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a-3bu^2(t,p) & -k \end{pmatrix} y$$

π−周期的となる。この基本解行列を $Y(t)$ とすると、

$$Y(2\pi) = Y^2(\pi)$$

となり、$Y(\pi)$の固有値をμ_1, μ_2とすれば、$Y(2\pi)$の固有値、即ち、$(u(t,p), v(t,p))$の特性根は、μ_1^2, μ_2^2となる。ゆえに、次の定義が可能となる。

［定義2］

pをodd harmonic点とする。

(i) pがcompletely stableであるとは、

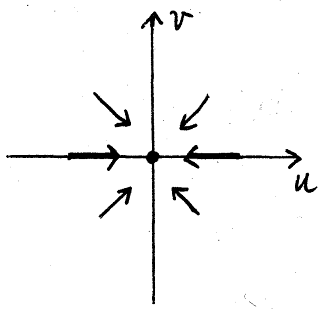
$|\mu_1^2| < 1,\ |\mu_2^2| < 1$ となることである。

(ii) pがdirectly unstableであるとは、

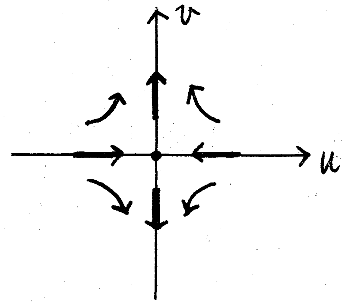
$0 < \mu_1^2 < 1 < \mu_2^2$ となることである。

上の(i),(ii)を図示すると、次の様になる。ここでpは原点であり、流れはPoincaré写像によるものである。

(i)



(ii)



次の定理が成立する。

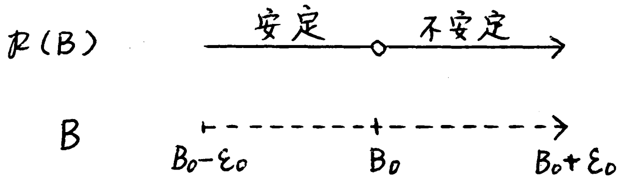
定理3.

ある正数B_1が存在して、system (1)は、$B=B_1$の時、directly unstableなodd harmonic解をもち、この変分方程式(2)の基本解行列$Y(t)$に対し、$Y(\pi)$の固有値は共に正とする。

この時、ある正数B_0 ($0<B_0<B_1$)と小なる数$\varepsilon_0>0$が存在して、$|B-B_0|<\varepsilon_0$なるBに対し、(1)はodd harmonic点$p(B)$をもち、$p(B)$はBの解析関数で、$B_0-\varepsilon_0<B<B_0$で、$p(B)$はcompletely stableで、$B_0<B<B_0+\varepsilon_0$で、$p(B)$はdirectly unstableとなり、$B=B_0$の時、$p(B_0)$に対応する変分方程式(2)は、自明でないπ-周期解をもつ。

注. 上の結果は、$k>0$を固定して、Bを減少させる場合を考えているが、同様の結果が、$B>0$を固定し$k>0$を増加させても得られる。

定理3の結論を図示すると、次の様になる。



定理3の証明の概略を示す。

Step 1. (1)の解で、$t=0$でpを通るものを

$$x(t, p\,;B) = (u(t, p\,;B),\ v(t, p\,;B))$$

と書く。点Pが odd harmonic であることは、

$$(3) \qquad p + x(\pi, p\,;B) = 0$$

と同値である。

$B=B_1$の時、定理の仮定の odd harmonic point をp_1とすると、

$$p_1 + x(\pi, p_1\,;B_1) = 0$$

となる。陰関数の定理を(3)に適用して、先づ$B=B_1$の近傍のBに対し、(3)の解$p(B)$を見出す。この$p(B)$を$B<B_1$の方向に解析接続し、その最大の定義域を$(\omega, B_1]$とかく。一致の定理より、

$p(B)$ は $(\omega, B_1]$ で (3) を満たす。ゆえに $p(B)$ は $(\omega, B_1]$ で odd harmonic 点となる。

Step 2. $p(B)$ に対する (2) の基本解を $Y(t, B)$ とし、$Y(\pi, B)$ の固有値を $\mu_1(B)$, $\mu_2(B)$ とする。

すると、定理の仮定は

$$0 < \mu_1(B_1) < 1 < \mu_2(B_1)$$ となる。

もし、$0 \in (\omega, B_1]$ ならば、$B=0$ の時 (1) は

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -kv - au - bu^3 \end{cases}$$

となり、この 2π ー周期点は唯一つ $P(0)=(0,0)$ で、

$$|\mu_1(0)| < 1 \ , \ |\mu_2(0)| < 1$$ となる。

この事より、ある $B_0 > 0$; $B_0 \in (\omega, B_1]$ が存在して、$B_0 < B < B_0 + \varepsilon_0$ で $0 < \mu_1(B) < 1 < \mu_2(B)$,

$B = B_0$ で $\mu_2(B) < 1$, $\mu_2(B) = 1$

$B_0 - \varepsilon_0 < B < B_0$ で $0 < \mu_1(B) < 1$, $0 < \mu_2(B) < 1$

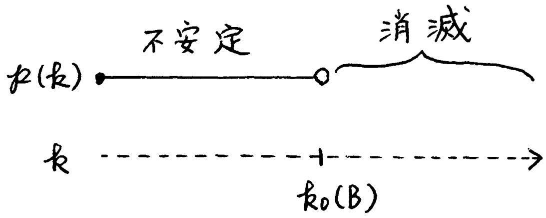
を示す。これは、定理の結論である。

$0 \notin (\omega, B_1]$ の場合は省略する。

定理3 より条件「$Y(\pi)$ の固有値が正である」は、落せないことを示す。

(1) において、$0 < a < 1$ で、B が十分小なる場合を考え

る。この時、[4]より、kがBに応じて十分小であれば、directly unstable な odd harmonic解をもち、$Y(\pi)$の固有値は負であることが確かめられる。
次に、Bを固定したまま、kを0より増加させて行けば、[2]より、Bに応じて決まるある定数 $k_0(B)>0$ が存在して、$0<k\leqq k_0(B)$では odd harmonic点 $p(k)$ が存在し、その指数は -1 であることが確かめられる。
ゆえに、$p(k)$は completely stable にはなり得ない。
更に、$k>k_0(B)$では $p(k_0(B))$の近傍に、2π−周期点は存在しない、いわゆる jump現象が起きている。
これを図示する。



§4. non odd harmonic 解の存在

non odd harmonic 解は、odd harmonic解より分岐して生ずることを示す。

<u>定理4.</u>

定理3の結論を全て仮定する。

この時、十分小なる $\varepsilon > 0$ $(0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$ が存在して、次の (i) あるいは (ii) が成立する。

(i) $B_0 < B < B_0 + \varepsilon$ に対し、*non odd harmonic* 点 $g(B)$ と $g^*(B)$ が存在して、

$$g(B) \longrightarrow g(B_0), \quad g^*(B) \longrightarrow g(B_0) \qquad (B \to B_0)$$

となる。

(ii) $B_0 - \varepsilon < B < B_0$ に対し、(i) と同様の事が成立する。

定理3と4の結果は [1] の物理的結果によって、明確化される。そこでは、$k = 0.2$, $a = 0$, $b = 1$ で、B をある単位で測って、$B = 0.3$ から $B = 3.0$ まで増加させて行く時の図2で示される 2π-周期点の軌跡が、観測されている。
図2で、$B = 0.3$ から $B = 2.403$ まで変化する時、*odd harmonic* 点 $p(B)$ は A_4 から A_5 まで曲線に沿って動き、*completely stable* である。他方、$B = 2.403$ から $B = 3$ まで変化させる時、*odd harmonic* 点 $p(B)$ は A_5 から A_6 までの曲線に沿って動き、*directly unstable* である。即ち、定理3の結論に即して言えば、$B_0 = 2.403$ で $p(B_0) = A_5$ である。
この時、A_5 より2つの *non odd harmonic* 点 $g(B)$ と $g^*(B)$ が分岐して発生し、

$$g(B) : \ A_5 \longrightarrow B_6 ,$$

$$g^*(B) \;:\; A_6 \longrightarrow C_6$$

であり、$g(3) = B_6$ で $g^*(3) = C_6$ で、$f(3) = A_6$ である。

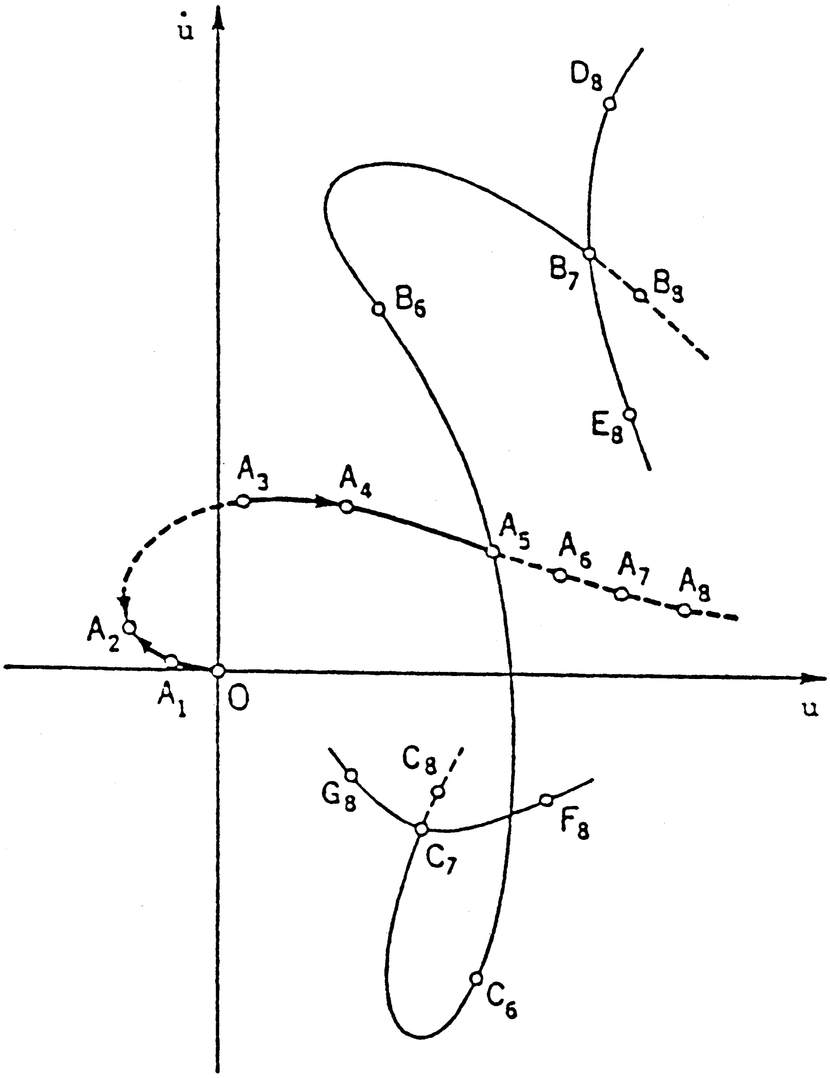


図 2.

[参 考 文 献]

[1] C. Hayashi, Y. Ueda and H. Kawakami, Transformation theory as applied to the solutions of non-linear differential equations of the second order, Int. J. Non-linear Mechanics, 4 (1969), pp. 235 - 255.

[2] J. K. Hale and D. Z. Táboas, Interaction of damping and forcing in a second order equation, Nonlinear Analysis, Theory, Method and Applications, Vol. 2, No. 1 (1978), pp. 77-84.

[3] W. A. Horn, Some fixed point theorems for compact maps and flows in Banach spaces, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 149 (1970).

[4] W. S. Loud, Periodic solutions of $\ddot{x} + c\dot{x} + g(x) = \varepsilon f(t)$, Amer. Math. Soc. Mem, 31 (1958).

[5] W. S. Loud, Nonsymmetric periodic solutions of certain second order nonlinear differential equations, J. Differential Equations, 5 (1969), pp. 352-368.

[6] F. Nakajima, Index theorems and bifurcations in Duffing's equation, Lecture Note in Numerical

and Applied Analysis, 8(1985), pp. 133-162.

[7] Y. Ueda, Steady motions exhibited by Duffing's equation, a picture book of regular and chaotic motions, Proceedings of a conference of new approaches to nonlinear problems in dynamics, SIAM (1980).